

压缩感知理论下扩展迭代重加权 最小二乘算法的性能分析*

陈小玲, 赵慧民, 魏文国

(广东技术师范学院电子与信息学院, 广东 广州 510665)

摘要: 利用最稀疏表示重构原始信号是压缩感知理论的核心, 而基于几何影射约束的最小 l_1 范数凸优化算法是其实现的主要方法。目前, 解决最小 $l_p (p \leq 1)$ 范数问题的关键是迭代重加权最小二乘算法 ($IRLS_{-p}$, $0 < p \leq 1$), 但其收敛和实时性较差。为此, 文中从最小化矩阵秩的角度出发对一类扩展迭代重加权最小二乘算法 ($EIRLS_{-p}$) 进行性能实现分析, 用以改进 $IRLS_{-p}$ 算法的连续迭代收敛性及其实时性能。验证结果表明, $EIRLS_{-0}$ 和 $sEIRLS_{-0}$ 算法性能优于奇异值门限 (SVT) 算法。同时, 在没有先验知识的情况下, $sEIRLS_{-0}$ 算法性能也优于迭代硬阈值 (IHT) 算法。

关键词: 迭代重加权; 矩阵秩; 压缩感知; Frobenius 范数

中图分类号: TN911.72 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579 (2014) 02-0023-06

The Performance Analysis of Extending Iterative Reweighted Least Squares Algorithm Compressed Sensing Theory

CHEN Xiaoling, ZHAO Huimin, WEI Wenguo

(School of Electronic and Information, Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510665, China)

Abstract: The kernel technology of Compressed sensing theory is to find the sparsest representation to recover original signal data, in which the convex optimization algorithm of minimization the l_1 norm is a important method. At present, a key algorithm solved minimization the $l_p (p \leq 1)$ norm is iterative reweighted least squares algorithm ($IRLS_{-p}$, $0 < p \leq 1$) with affine constraints, but a crucial question of the $IRLS_{-p}$ Algorithm is to iterate convergence and real time performances. Therefore, the $EIRLS_{-p}$ and $sEIRLS_{-p}$ algorithms were proposed to extend $IRLS_{-p}$ as a family of algorithms for the matrix rank minimization problem, and to improve $IRLS_{-p}$ implementations performances of successive iterates convergence and real time. Validating results show that both $EIRLS_{-0}$ and $sEIRLS_{-0}$ perform better than singular value thresholding (SVT) algorithm. At the same time, it was observed that $sEIRLS_{-0}$ performs better than iterative hard thresholding algorithm (IHT) when there is no apriori information on the low rank solution.

Key words: iterative reweighted; matrix rank; compressed sensing; Frobenius norm

基于几何影射学原理, 经典的压缩感知理论可以表示为:

$$\text{mincard}(x) \quad s. t. A(X) = b \quad (1)$$

这里 $x \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\text{card}(x)$ 表示张成希尔伯特空间 x 的非零元素集, X 是 x 的全体。目前, 解决 (1) 式的几种主要算法是基于最小 l_1 范数的凸

* 收稿日期: 2013-09-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61272381); 广东省自然科学基金资助项目 (S2012010008639); 广东省科技计划资助项目 (2012B010100035)

作者简介: 陈小玲 (1971年生), 女; 研究方向: 电子信息技术与信息安全; E-mail: CXL1688@163.com

优化算法、匹配追踪等贪婪算法^[1-5]。为了改进最小 l_1 范数算法的信号恢复性能, Candes 和 Dautchies 等^[6-7]分别提出了迭代重加权 l_1 和迭代重加权最小二乘 $IRLS_{-p}$ ($0 < p \leq 1$) 算法。其中, 在 $IRLS_{-p}$ 算法中, 第 $(k+1)$ 次迭代形式表示为:

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}_x \sum_i w_i^k x_i^2 \quad s. t. Ax = b \quad (2)$$

这里, $w_i^k = (|x_i^k| + \gamma)^{p/2-1}$ 表示加权矢量, 而 $\gamma > 0$ 为 w^k 的调节参数。由于存在大量的矢量运算, (2) 式实现的最大问题是平衡解决迭代收敛性和实时性的折中关系。为此, Mohan and Fazel^[8]提出了重加权核范数递推算法。但是, 核范数最小化的有效实现也是一个挑战性难题, 尤其迭代次数增加时, 算法的计算量仍然很大。

Chartrand 等^[9-10]证明, 在 A 的零空间假设条件下, 核范数最小化 $IRLS_{-1}$ 算法的输出与最低秩 $A(X) = b$ 的结果是一致的。同时, 他说明在 $p < 1$ 时 $IRLS_{-p}$ 比最小 l_1 范数具有更好的信号恢复性能。基于此条件, 利用几何影射学原理^[11], 通过每次迭代时对加权 F 范数 (即 Frobenius Norm) 的最小化处理, 本文分析了一类扩展 $EIRLS_{-p}$ 算法的性能。在此基础上, 通过梯度投影 GP (Gradient Projection) 简化迭代二乘目标函数的求解过程, 进而实现了一类短时迭代重加权最小二乘算法 (简称 $sEIRLS_{-p}$ 算法)。本文研究的目的是, 实现压缩感知理论下 $EIRLS_{-p}$ 算法的收敛性与实时性之间的有效折中, 为信号高质量恢复提供一种新的研究参考。

1 几何影射 $EIRLS_{-p}$ 算法

定义矩阵 X 的核范数为 $\|X\|_* = \sum_i \sigma_i(X)$,

其中 $\sigma_i(X)$ 代表了 X 中第 i 个最大奇异值。由此, 对于求解压缩感知理论的 (1) 式问题, 我们可以得到一种最小核范数关系式:

$$\min \|X\|_* \quad s. t. \quad A(X) = b \quad (3)$$

(3) 式的求解类似于凸优化最小 l_1 范数算法, 但凸优算法的最大问题是迭代收敛性能较差^[13]。为此, 我们考虑 (3) 式的一种秩函数非凸近似求解方法。定义 F (Frobenius) 范数下的一种平滑 Schatten- p 函数形式为

$$f_p(X) = \operatorname{Tr}(X^T X + \gamma \cdot I)^{\frac{p}{2}} \quad (4)$$

这里 $\operatorname{Tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹。由矩阵迹函数的性质可知, 当 $p > 0$ 时, 函数 $f_p(X)$ 是可微的; 当 $p \geq 1$ 时, $f_p(X)$ 具有凸性; 而满足 $\gamma = 0 \cup p \rightarrow 0$ 时,

$f_p(X) \rightarrow \operatorname{rank}(X)$ 。当 $p = 1, \gamma = 0$ 时, $f_1(X) = \|X\|_*$ 称为 Schatten-1 范数。因此, 对 (3) 式的求解近似于求解以下问题:

$$\min f_p(X) \quad s. t. A(X) = b \quad (5)$$

注意到对 (4) 式取微分有: $\nabla f_p(X) = pX(X^T X + \gamma \cdot I)^{p/2-1}$ 。代入 (5) 式, 则其成立的一种 KKT 方程条件 (Karush-Kuhn-Tucker 最优化条件) 可写为^[14]:

$$\begin{aligned} X(X^T X + \gamma \cdot I)^{p/2-1} + A^*(\lambda) &= 0 \\ A(X) &= b \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $A^*(\lambda)$ 表示特征值为 λ 时矩阵 A 的共轭矩阵。对 (6) 式 KKT 条件 1 求解有:

$$X = -\frac{1}{2} A^*(\lambda) (X^T X + \gamma \cdot I)^{1-p/2} \quad (7)$$

这是一个定点等式, 可通过迭代方式求解。设加权系数为 $W_p^k = (X^{kT} X^k + \gamma \cdot I)^{p/2-1}$, 按照 KKT 条件 2 的 $A(X^{k+1}) = b$ 成立条件, 把 W_p^k 代入 (7) 式, 得到 X 迭代求解过程为

$$X^{k+1} = \frac{1}{2} A^*(\lambda) W_p^{k-1} \quad (8)$$

由式 (7)、(8) 可见, X^{k+1} 满足了 (6) 式的 KKT 条件, 且遵循了 (9) 式的凸优化关系:

$$\min \operatorname{Tr} W_p^k X^T X \quad s. t. \quad A(x) = b \quad (9)$$

说明, 秩最小化 $EIRLS_{-p}$ 系列算法就是对应压缩感知凸优化算法的一种近似扩展。

1.1 $EIRLS_{-1}$ 实现的收敛性

为了准确分析 $EIRLS_{-1}$ 算法连续迭代收敛的特性, 定义 F 范数意义下的一种函数:

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{Z}, W, \gamma) &= \frac{1}{2} (\operatorname{Tr}(W \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}) + \\ &\quad \gamma \operatorname{Tr}(W) + \operatorname{Tr}(W^{-1})) \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{Z} \in G(b)$, $G(b)$ 为零状态空间中 $A(X) = b$ 的希尔伯特空间解集。当 $p = 1$ 时, $EIRLS_{-p}$ 算法的第 2 步迭代等价于

$$X^{k+1} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{Z} \in G(b)} \Gamma(\mathbf{Z}, W^k, \gamma^k) \quad (11)$$

选择 $\gamma^{k+1} = \min\{\gamma^k, \sigma_{K+1}(X^{K+1})/N\}$, 其中 K 和 N 是固定整数。把 (10) 式加权矢量代入 (11), 并根据矩阵迹和 F 范数的性质, 我们可以同时得到以下迭代关系^[14-16]:

$$W^{k+1} = \operatorname{argmin}_{W > 0} \Gamma(X^{k+1}, W, \gamma^{k+1}) \quad (12)$$

且有关系

$$\begin{aligned} \Gamma(X^{k+1}, W^{k+1}, \gamma^{k+1}) &\leq \Gamma(X^{k+1}, W^k, \gamma^{k+1}) \leq \\ \Gamma(X^{k+1}, W^k, \gamma^k) &\leq \Gamma(X^k, W^k, \gamma^k) \end{aligned} \quad (13)$$

由此, 对于任意 $k \geq 1$, 我们有关系 $\|X^k\|_* \leq$

$\Gamma(X^1, W^0, \gamma^0) := D$ 。这里, $W^0 = I, \gamma^0 = 1$ 。且存在 $\sigma_i(W^k) \geq D^{-1}, j = 1, 2, \dots, \min[m, n]$ 。这说明, 在张成希尔伯特零状态空间内, 通过选择一定的调节参数 γ , $EIRLS_{-1}$ 算法总能够有效收敛, 且能够用具有唯一最小化秩的核范数矩阵表示^[11,17]。

1.2 $EIRLS_{-0}$ 实现的收敛性

为了说明 $EIRLS_{-0}$ 实现算法的收敛性, 定义一种对于 W 和 X 都严格凸性的 F 范数函数:

$$H(X, W, \gamma) = Tr(WX^T X) + \gamma \cdot Tr W - \log \det W \quad (14)$$

其中, $\det W$ 表示矩阵 W 的行列式。根据矩阵迹和 F 范数的性质, 类似于公式 (13) 存在如下关系:

$$\begin{aligned} H(X^{k+1}, W^{k+1}, \gamma^{k+1}) &\leq H(X^{k+1}, W^k, \gamma^{k+1}) \leq \\ &H(X^{k+1}, W^k, \gamma^k) \leq \\ &H(X^k, W^k, \gamma^k) \end{aligned} \quad (15)$$

对于任意 $k \geq 1$, 我们有 $\log \det(X^{kT} X^k) \leq H(X^1, W^0, \gamma^0) := E$ 。设 $\sigma_j(W^k)$ 为加权矩阵 W 第 k 次迭代的第 j 个奇异值, 则存在有不等关系式 $\sigma_j(W^k) \geq e^{-E}, j = 1, 2, \dots, t$ 。其中, $t = \min[m, n]$ 。这也说明了 $EIRLS_{-0}$ 算法能够有效收敛, 且能够用一种稳定的矩阵形式唯一表示。

2 基于梯度投影的 $sEIRLS_{-p}$ 算法

2.1 $sEIRLS_{-p}$ 算法的实现原理

借鉴梯度投影对交替迭代优化求解的实现过程^[18], 我们在构造低秩矩阵时, 把矩阵 X 的实现问题也可通过梯度投影 (GP) 方式进行计算, 并得到 $EIRLS_{-p}$ 算法实现的另一种形式 - 短时扩展迭代重加权最小二乘 ($sEIRLS_{-p}$) 算法。其满足关系:

$$\min \text{rank}(X) \quad s. t. P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(X_0) \quad (16)$$

这里, X_0 是我们恢复的信号数据矩阵。 $P_{\Omega}: R^{n \times n} \rightarrow R^{n \times n}$, 表示矩阵 X 在支撑 Ω 中投影时数据元素 X_{ij} 的投影算子, $(i, j) \in \Omega$ 。 $sEIRLS_{-p}$ 算法的实现过程描述如下:

设置 $k = 0, X^0 = 0$, 按以下步骤迭代计算:

- 1) $W_p^k = (X^{kT} X^k + \gamma^k \cdot I)^{\frac{p}{2}-1}$ 。
- 2) $X^{k+1} = P_{\Omega}(X^k - \alpha^k X^k W_p^k) + P_{\Omega}(X_0)$ 。
- 3) 设置 $k = k + 1$ 。重复 1) - 3) 直到收敛。

由此可见, 对于固定的 γ 参数, $sEIRLS_{-p}$ ($0 < p \leq 1$) 算法可以看作 GP 算法求 F 范函数最小值 - $\min f_p(X) (s. t. A(X) = b)$ 的结果。该算法收敛到的每个簇点都是平滑 Schatten-p 函数的稳定点,

具有约束条件 $\{X: P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(X_0)\}$, 且 $\gamma = \gamma_{\min}$ 。而当 $p = 0$ 时, $sEIRLS_{-0}$ 算法可看作 GP 算法求矩阵实现约束条件 - $\min \log \det(X^T X + \gamma \cdot I) (s. t. A(X) = b)$ 的最小化关系问题, 其收敛到的簇点是满足该关系的一个稳定点。同时, 当 $p = 1$ 时, $sEIRLS_{-1}$ 和 $EIRLS_{-1}$ 算法也都能够收敛到平滑 Schatten - 1 函数的全局极小值。

2.2 $sEIRLS_{-p}$ 算法的快速梯度投影

在不同条件下, 为了使 $EIRLS$ 算法能够用低秩矩阵实现数据的高概率恢复, 同时又能使系统满足实时性要求, 我们用梯度投影关系 $P_{\Omega}(X) = P_{\Omega}(X_0)$ 替代 $EIRLS_{-p}$ 算法中 $A(X) = b$ 的约束条件。同时, 用梯度投影 (GP) 算法求解 $EIRLS$ 算法中每次迭代的最小二乘运算过程。为此, 我们得到一种快速 $sEIRLS_{-p}$ 算法的具体实现方式如下:

设置 $k = 0, X^0 = 0$, 按以下步骤迭代:

- 1) $W_p^k = (X^{kT} X^k + \gamma^k \cdot I)^{\frac{p}{2}-1}$, 设 $X_{\text{old}} = X^k$ 。
- 2) 设置梯度投影常数为 L , 进行梯度投影 (GP)。
 - a) $X_{\text{new}} = P_{\Omega}(X_{\text{old}} - \frac{2}{L} X_{\text{old}} \cdot W_p^k) + P_{\Omega}(X_0)$;
 - b) $X_{\text{old}} = X_{\text{new}}$ 。返回 a) 迭代直到 GP 收敛。
 - 3) $X^{k+1} = X_{\text{new}}, k = k + 1$, 返回 1) 直到 $EIRLS_{-p}$ 算法收敛。

算法中, GP 的步长为 $2/L^k$, L^k 是二次方函数 $Tr(W^k X^T X)$ 在第 k 次迭代的利普希兹 (Lipschitz) 梯度常数。由算法可见, GP 算法是利用 $EIRLS$ 算法第 k 次迭代的结果作为第 $(k + 1)$ 次迭代梯度投影的先验条件, 然后寻找每次迭代加速收敛的一种实现过程。

3 算法的验证及其性能分析

3.1 算法验证的参数选择

设原始数据矩阵为 X , 由 $Y \cdot Y^T$ 产生, 其中 Y 为 I. I. D 高斯分布的数据矩阵, 且 $Y \in R^{n \times r}$, $n = 500$ 。归一化要恢复的矩阵为 X_0 (最大奇异值为 1), 其大小为 500×500 。 X_0 的秩 r 分别设置为 5、10、15, 同时, 我们定义当算法恢复的信号数据相对错误率 $\xi = \|X - X_0\|_F / \|X_0\|_F \leq 10^{-3}$ 时, 信号恢复是成功的。实验时, 支撑 Ω 通过均值为 q 的贝努立 $\{0, 1\}$ 随机值产生。所做实验用 Matlab 在 Intel 双核处理器上执行, 其 CPU 为 3 GHz, RAM 大小为 3.25 GB。

调节参数 γ 的选择: 为了分析调节参数对算法

迭代与恢复数据的性能影响, 固定 X_0 的刻度因子 $\eta = 1.15$, 调节参数 $\gamma^k = \gamma^0 / \eta^k$ (γ^0 为初始调节值)。设置 $\gamma^0 = \gamma_c \|X_0\|_2^2$, γ_c 是需要估计的比例因子, 图 1 显示了不同 γ_c 条件下 $EIRLS_{-p}$ 迭代次数 κ 与数据恢复 ξ 的关系。

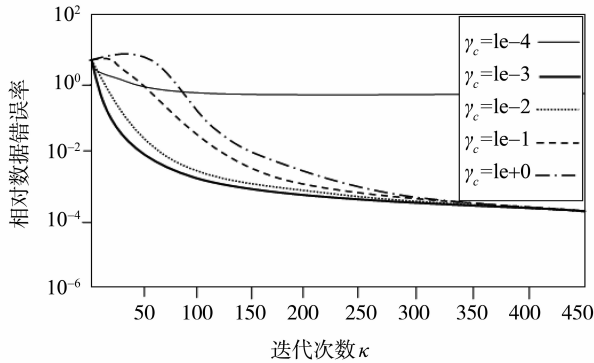


图 1 $n = 500$, $p = 0$, $\eta = 1.15$, 不同 γ_c 条件下 $EIRLS_{-p}$ 算法的实现性能

Fig. 1 $n = 500$, $p = 0$, $\eta = 1.15$, implementation performances of $EIRLS_{-p}$ to different γ_c

由图 1 可见, 当 $\gamma_c < 10^{-3}$ 时, 收敛速度较快, 但相对错误率 ξ 值较大; 而当 $\gamma_c > 10^{-3}$ 时, 相对错误率 ξ 较小, 但收敛速度较慢。因此, γ_c 的选择是影响 $EIRLS_{-p}$ 算法实现性能的关键。由验证实验结果可知, 选择 $\gamma_c = 10^{-3}$, $EIRLS_{-p}$ 算法恢复数据的性能最好。

刻度参数 η 的选择: 设置 $\gamma_c = 10^{-3}$, 定义秩为 r 的矩阵 X_0 的自由度为 $r(2n-r)$, 矩阵 X_0 的自由度率 $FR = r \cdot (2n-r)/q$, 采样率 $SR = q/n^2$ 。通过实际计算过程可知, 如果 $FR > 0.4$ 或接近于 1, 算法恢复矩阵 X_0 就很困难; 反之, 如果 $FR < 0.4$ 或接近于 0, 则恢复 X_0 就比较困难。

图 2 表示了 $EIRLS$ 算法与刻度参数 η 的敏感性关系。算法实现时, 当确定 γ^0 后, η 取决于 X_0 的秩和 SR 的大小。对于不同条件的 X_0 实现问题, 我们随机产生 10 个支撑。由图可见, 如果 X_0 的秩 $r = 5, 10, 15$, $FR = 0.18, 0.2, 0.33$ 时, $\eta = 1.15, 1.1, 1.05$, 算法恢复数据的错误率都较低, 其实现性能都较好。

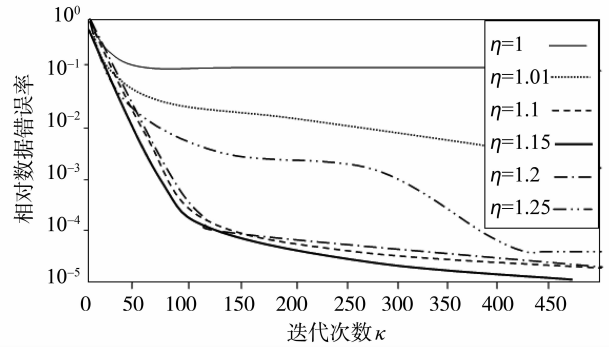


图 2 $n = 500$, $\gamma_c = 10^{-3}$, 不同 η 条件下 $EIRLS$ 算法的实现性能

Fig. 2 $n = 500$, $\gamma_c = 10^{-3}$, implementation performances of $EIRLS$ to different η

3.2 算法的实验结果及其性能比较

算法实现时, 我们认为当数据相对错误率 $\xi \leq 10^{-3}$ 时, 表示算法成功恢复了原始信号, 并用 NS 作为成功恢复的次数。实验时选择 $\gamma_c = 10^{-3}$, 同时, 当 $FR < 0.4$ 时, 选择 $\eta = 1.1$; 而当 $FR \geq 0.4$ 时, 选择 $\eta = 1.03$ 。表 1 列出了当 $FR < 0.4$ 时, 在相同实验参数设置下算法的实现性能, 并与 SVT 算法进行了比较。可见, $EIRLS_{-0}, sEIRLS_{-0}, EIRLS_{-1}, sEIRLS_{-1}$ 算法都能够较好地恢复原始数据, 但 SVT 在某些情况下却是无效的。由表也可以看到, $EIRLS_{-0}$ 比 $EIRLS_{-1}$ 算法收敛时需要更少

表 1 $EIRLS$ 和 SVT 算法的实现性能比较 ($FR < 0.4$)

Table 1 Performances comparison for $EIRLS$ and SVT algorithm ($FR < 0.4$)

实验参数设置				$EIRLS_{-1}$		$sEIRLS_{-1}$		$EIRLS_{-0}$		$sEIRLS_{-0}$		SVT	
n	r	SR	FR	κ	时间/ms	κ	时间/ms	κ	时间/ms	κ	时间/ms	κ	时间/ms
100	10	0.57	0.34	131	4.45	130	1.61	53	0.75	55	0.81	170	5.68
200	10	0.39	0.25	136	4.45	137	2.38	58	1.32	61	1.28	109	3.73
500	10	0.2	0.2	158	24.41	161	6	75	9.61	96	4.93	95	5.8
500	10	0.12	0.33	269	37.72	335	13.81	218	22.72	278	11.01	-	-
1 000	10	0.12	0.17	180	113.68	192	32.16	108	55.39	139	20.76	85	10.70
1 000	50	0.39	0.25	139	134.25	138	102.51	50	59.62	58	61.26	81	49.15
1 000	20	0.12	0.33	239	156.03	281	57.81	186	96.18	238	43.04	-	-
2 000	20	0.12	0.17	178	485.19	188	166.21	99	235.91	129	98.51	73	42.30
2 000	40	0.12	0.33	235	810.01	268	322.89	168	432.25	218	227.01	-	-

的迭代次数和更低的计算时间。而在各种情况下， $sEIRLS_0$ 算法具有最好的实时性能。

表 2 说明了当 $FR \geq 0.4$ 时，算法 $sEIRLS_{-1}$ 、 $EIRLS_{-0}$ 、 $sEIRLS_{-0}$ 的实现性能。由表可见，在不同条件下， $EIRLS_{-0}$ 、 $sEIRLS_{-0}$ 都能较好地恢复原始数据，但 $sEIRLS_{-1}$ 算法在某些情况下是无效的（SVT 在各种条件下都不能执行，因此这种情况下没有列出）。当 $n > 500$ 后，相比其它算法， $sEIRLS_{-0}$ 具有更好的实时性能。

由以上的结果可见，在 $sEIRLS_{-p}$ 、 $EIRLS_{-p}$ 系列算法中， $sEIRLS_{-0}$ 实时性更强、实现性能最好。因此这里，我们主要比较 $sEIRLS_{-0}$ 和 IHT 算法的实现性能。在不同情况下，表 3 和 4 分别列举了两种算法实现时的需要的迭代次数、恢复次数 NS 以及计算时间。由表 3 可见，当 $FR < 0.4$ 时，两种算法具有一定的可比较性。而当 $FR \geq 0.4$ 时，由表 4 可见， $sEIRLS_{-0}$ 算法的实现性能明显优于 IHT 算法。

表 2 $EIRLS$ 算法的实现性能分析 ($FR \geq 0.4$)

Table 2 Performances analyzing for $EIRLS$ algorithm ($FR \geq 0.4$)

实验参数设置				$sEIRLS_{-1}$			$EIRLS_{-0}$			$sEIRLS_{-0}$		
n	r	SR	FR	κ	NS	时间/ms	κ	NS	时间/ms	κ	NS	时间/ms
40	9	0.5	0.8	4 705	4	162.2	1 382	10	17.32	2 361	9	30.19
100	14	0.3	0.87	10 000	0	545.81	4 809	10	89.48	5 032	8	114.5
500	20	0.1	0.78	10 000	0	723.52	4 643	8	389.58	5 138	10	315.52
1 000	20	0.1	0.4	643	10	142.81	338	10	182.75	403	10	97.12
1 000	20	0.06	0.66	10 000	0	1 830.92	2 675	10	921.01	2 923	10	484.15
1 000	30	0.1	0.59	1 146	10	295.06	769	10	400.92	909	10	243.19
1 000	50	0.2	0.49	548	10	339	187	10	239.71	268	10	231.21

表 3 $sEIRLS_{-0}$ 和 IHT 算法的实现性能比较 (当 $FR < 0.4$ 时)

Table 3 Performances comparison for $sEIRLS_{-0}$ and IHT algorithm ($FR < 0.4$)

实验参数设置				$sEIRLS_{-0}$			IHT		
n	r	SR	FR	κ	NS	时间/ms	κ	NS	时间/ms
100	10	0.57	0.34	55	10	0.81	37	10	0.79
200	10	0.39	0.25	61	10	1.28	44	10	1.49
500	10	0.2	0.2	96	10	4.93	70	10	5.16
500	10	0.12	0.33	278	10	11.01	202	10	8.23
1 000	10	0.12	0.17	139	10	20.76	102	10	17.69
1 000	50	0.39	0.25	58	10	61.26	34	10	80.24
1 000	20	0.12	0.33	238	10	43.04	176	10	34.79
2 000	20	0.12	0.17	129	10	98.51	96	10	90.19
2 000	40	0.12	0.33	218	10	227.01	166	10	202.2

表 4 $sEIRLS_{-0}$ 和 IHT 算法的实现性能比较 ($FR \geq 0.4$ 时)

Table 4 Performances comparison for $sEIRLS_{-0}$ and IHT ($FR \geq 0.4$)

实验参数设置				$sEIRLS_{-0}$			IHT		
n	r	SR	FR	κ	NS	时间/ms	κ	NS	时间/ms
40	9	0.5	0.8	2 361	9	30.19	5 000	0	51.40
100	14	0.3	0.87	5 032	8	114.5	5 000	0	75.63
500	20	0.1	0.78	5 138	10	315.52	5 000	0	583.04
1 000	20	0.1	0.4	403	10	97.12	280	10	72.67
1 000	20	0.06	0.66	2 923	10	484.15	10 000	0	1 175.45
1 000	30	0.1	0.59	909	10	243.19	660	10	213.95
1 000	50	0.2	0.49	268	10	231.21	203	10	186.15

4 总结与展望

基于几何影射求矩阵秩最小化问题, 分析了 $EIRLS_{-p}$ 和 $sEIRLS_{-p}$ 的系列实现算法, 并分析了它们在各种情况下的收敛性和实时性。在零状态空间及其假设条件下, $EIRLS_{-1}$ 算法能够收敛到唯一核范数函数, 这与最低秩矩阵满足几何影射的约束条件是一致的。我们也说明了 $EIRLS_{-0}$ 和 $sEIRLS_{-p}$ 算法收敛到最小平滑函数的稳定点问题, 并给出了通过梯度投影实现算法的具体结构。在不同条件下的实验结果表明, $EIRLS_{-0}$ 和 $sEIRLS_{-0}$ 算法比 SVT 算法具有更好的实现性能。而相比于 IHT 算法, 当矩阵秩信息未知时, $sEIRLS_{-0}$ 算法的性能具有明显的优势。未来的工作, 结合非凸优化问题, 我们主要研究 $EIRLS_{-0}$ 和 $sEIRLS_{-0}$ 算法的实现效果和收敛率, 并将其尽快应用于信息安全的数据处理研究领域。

参考文献:

- [1] ARORA S, DASKALAKIS C, STEURER D. Message-passing algorithms and improved l_p decoding [C] // Proc 41st annual ACM symposium on Theory of Computing, 2009; 3 - 12.
- [2] 周燕, 张德丰, 马子龙. 基于压缩感知的图像哈希水印算法研究 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2010, 49 (6): 58 - 63.
- [3] CANDÈS E J, RECHT B. Exact matrix completion via convex optimization [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(6): 717 - 772.
- [4] CANDÈS E J, BECKER S. Software for singular value thresholding algorithm for matrix completion [EB/OL]. Available at <http://svt.caltech.edu/code.html>. 2010.
- [5] 杨海蓉, 张成, 丁大为, 等. 压缩感知理论与重构算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142 - 147.
- [6] CANDÈS E J, WAKIN M B, BOYD S. Enhancing sparsity by reweighted l_1 minimization [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2008, 14(5): 877 - 905.
- [7] DAUBECHIES I, DEVORE R, FOMASIER M, et al. Iteratively re-weighted least squares minimization for sparse recovery [EB/OL]. <http://arXiv.org/abs/0807.0575>. 2008.
- [8] MOHAN K, FAZEL M. Reweighted nuclear norm minimization with application to system identification [C] // Proc. American Control Conference (ACC), 2010; 2953 - 2959.
- [9] CHARTRAND R, STANEVA V. Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing [J]. Inverse Problems, 2008, 24(035020): 1 - 14.
- [10] CHARTRAND R, YIN W. Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing [C] // 33rd International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2008; 3869 - 3872.
- [11] KARTHIK M, MARYAM F. Iterative reweighted least squares for matrix rank minimization [C] // Forty-Eighth Annual Allerton Conference, USA, 2010; 653 - 661.
- [12] GOLDFARD D, MA S. Convergence of fixed point continuation algorithms for matrix rank minimization [R]. Technical Report, Available at <http://www.columbia.edu/sm2756/FPCAconvergence.pdf>. 2009.
- [13] GROSS D, LIU Y K, FLAMMIA S T, et al. Quantum state tomography via compressed sensing [EB/OL]. Preprint available at <http://arxiv.org/PS/cache/arxiv/pdf/0909/0909.3304v2.pdf>. 2010.
- [14] 魏木生. 广义最小二乘问题的理论和计算 [M]. 北京: 科学出版社, 2006; 161 - 165.
- [15] MEKA R, JAIN P, DHILLON I S. Guaranteed rank minimization via singular value projection [EB/OL]. Available at <http://arxiv.org/abs/0909.2009>; 54 - 57.
- [16] LEE K, BRESLER Y. ADMIRA: Atomic decomposition for minimum rank approximation [EB/OL]. Available at <http://arxiv.org/abs/0905.0044>. 2009.
- [17] LU Z, PONG T K. Interior point methods for computing optimal design [EB/OL]. Available at <http://arxiv.org/PS/cache/arxiv/pdf/1009/1009.1909v1.pdf>. 2010.
- [18] 练秋生, 周婷. 结合字典稀疏表示和非局部相似性的自适应压缩成像算法 [J]. 电子学报, 2012, 40(7): 1416 - 1422.